中学生における数学公式への理解 †

―直方体の体積について―

伊澤　沙織*・橘川　真彦*
宇都宮大学教育学部*

三変数の公式である直方体の求積公式を用いて，「関係操作が不可能な学習者の割合を調べ，その原因を明らかにすること」及び「関係操作が可能な者と不可能な者とで，数学への意識に相違が存在するのかを明らかにすること」を目的として，中学2年生138名を対象に問題を作成し解答及び回答を求めた。その結果，まず，直方体の体積を求める公式において，数値操作と関係操作の成立は別であることが示された。次いで，相対把握を行いかつ「差の非保存・関係保存」の理解が成立していれば関係操作は行いやすく，逆に，絶対把握を行いかつ「差の非保存・関係保存」の理解が成立していなければ，関係操作は行いにくいということが明らかにされた。また，関係操作が行なえる者はそうでない者に比べて，数学・空間図形への意識が高いことが示された。したがって，中学生が公式の本質を理解するためには，公式は答えを導くツールという認識ではなく，定理を数式化したものであることから，具体的な数値がわからなくても公式が利用できるという認識を持つような授業が必要であると考察された。
キーワード：公式理解，体積公式，関係操作，中学生

1．問題と目的

近年，日本の中学生は，数学への関心が低下し，数学嫌いが増加している。文部科学省（2007）の調査によると，日本の中学校2年生の数学の平均得点は，2003年の時と同じであるが，1999年，1995年の時の調査よりも，いずれも有意に低くなっている。また，数学の勉強が楽しいかを尋ねたところ，日本は「強くそう思う」と答えた生徒の割合が，国際平均を下回っている。「数学を学習する重要性の意識」についても同様に国際平均を下回っている。「数学の勉強に対する自信」については，国際的に最も低いという結果が示された。

これらの結果から，現在の我が国の中学生は数学を楽しい科目であると思っていないどころか，数学を学習する重要性すら感じていないことになる。つまり，現在の中学生は，数学という科目は日常生活などで役に立つものではないから，学ぶ意義はないという考えを持っているということになる。その要因の1つとして，「数学は公式を覚えないと解けない」という意識があるからだと考えられる。

数学では様々な公式が学習の対象となっている。数学において公式を学習する際に，まず，教師が公式を児童・生徒に覚えさせ，その後，公式に実際に具体的な数値を代入して，答えを出す練習をするといった教え方が多くみられる。よって，公式に数値を代入することで公式が身に付き，習熟することができるという考えは，一見正しいように思われる。

しかし，このような学習方法では，公式を知らなければ問題を解くことはできないという意識が生まれてしまうと考えられる。さらに，公式は覚えるもので，それは数学の授業やテストのなかでしか使わないものだという考えも生まれてしまう恐れがある。これでは，学習指導要領にも定められているように，本来算数や数学で培わなければならない，事象を数理的に考察する能力，つまり論理的思考力の育成は望めない。それは，数学教育にとって大きな問題である。そのため，算数・数学で論理的思考力をつけるために，どのような教育をしていけばよいかを考えていく必要がある。

麻柄（2009）により，三角形の面積を求める公式において数値操作と関係操作は別であることが示された。数値操作とは，公式に数値を代入して答えを算出する操作で，関係操作とは，公式を用いるが数

† Saori IZAWA* and Masahiko KIKKAWA*: The understanding of Math formulas for students in junior high school –on the volume of a rectangular solid–
* Faculty of Education, Utsunomiya University

値を代入せず変数間の関係に着目して答えを導く操作である。また，麻柄（2009）は，関係操作が行えるためには，「差の非保存・関係保存」の理解が必要であることも示している。ここで言う「差の非保存・関係保存」とは，たとえば2つの三角形で「底辺が同じで高さは片方の2倍」という条件が保持されていれば，底辺と高さの値がどう変化しても「面積2倍」という関係は保持されるが，面積差は保存されないということである。「差の非保存」の理解ができていない，つまり「差が保存」されているとすれば，どんな三角形においても，差は保存されているため，具体的な数値が与えられていないとしても、「○㎠大きい」と公式を使うことなく答えが導き出せるということになる。これは，関係操作が行えたということにはならない。また，「関係保存」の理解ができていない，つまり「関係は保存されない」と考えているならば，公式を用いても答えを導き出すことはできないので，関係操作を行うことはできない。このことから考えても，関係操作を行うためには，まず「差の非保存・関係保存」を理解している必要がある。

麻柄（2009）の研究では，このように三角形の面積という二変数の公式を用い，小学生を対象にしたものであった。

そこで本研究では，三変数の公式においても，数値操作と関係操作は別であるかを明らかにし，関係操作に相対把握か絶対把握かということと「差の非保存・関係保存」の理解は影響を与えているのかを検討することを第一の目的とする。三変数の公式においても同様なことが言えるかを明らかにすることで，算数・数学教育において，現在の公式の学習の問題点を解決するために，非常に有効的だと考えられる。

また，関係操作と「数学への意識」に関連があるかを検討することを第二の目的とする。関係操作が行える者は，公式を使って，答えを導き出せることから，数学は物事を論理的に考える思考力を育てるものだということを無意識にでも感じていると考えられる。そのため，関係操作が行える者は「数学に対する意識」は高いと考える。それに対して，関係操作を行えない者は，公式は覚えるもので，具体的な数値がないと使えないと思っていると考えられるため，数学は日常生活で役に立たないと感じてしまい，「数学に対する意識」は低いと考えられる。関係操作ができる者とそうでない者の「数学に対する意識」が異なるのかを明らかにすることで，現在，問題となっている日本の中学生の数学への関心の低さを改善する手がかりの1つとして有効だと考えられる。

そこで，本研究では，直方体の体積を求める公式「体積＝縦×横×高さ」を使い調査を行うことにする。柱は錐よりも公式が簡単で，また，直方体の体積公式は，円柱の体積公式「体積＝π×半径×半径×高さ」や三角柱の体積公式「体積＝底辺×高さ÷2×高さ」よりも扱いやすい。そのため，数値操作でも直方体の体積を求める公式は使いやすく，余分な計算が必要ないため，関係操作を行う際にも考えやすいはずである。

また，今回の調査は，小学生ではなく中学生を対象に行う。中学1年生の最終単元が空間図形の単元である。その時に，直方体を含め，空間図形の体積の求め方を学習するため，直方体の求積公式についての知識が身につくのは，中学生で空間図形の単元を学習した後の時期だと考えられるからである。

以上のことから，本研究では中学2年生を対象に，三変数である直方体の体積を求める公式での関係操作の成否を調べることとする。その結果，二変数の公式同様に，三変数の公式においても，相対把握を行いかつ「差の非保存・関係保存」を理解している者では関係操作を行いやすいと言えるという仮説を検討する。また，関係操作ができる者は，できない者より「数学への意識」が高いと言えるという仮説も検討する。

2．方法

（1）調査対象者

栃木県内の公立中学校1校の2年生138名。

（2）調査時期及び調査手続き

無記名，個別記入式の問題冊子を作成し，2011年5月中旬に学級別に配布・解答後，回収した。各自のペースで読み進め解答し，解答時間は約20分であった。

（3）調査内容

①数学・空間図形に対する意識

「数学の授業は好きか」「数学は難しいと思うか」「空間図形の授業に対して意欲的に取り組んでいるか」などの6項目について回答を求めた。回答は「いいえ」「どちらかといえば，いいえ」「どちらかと

いえば，はい」「はい」の４段階評定とし，それぞれに 1～4 点を与えて得点化した。

②数値操作の問題(問題 1)

実際に直方体の縦・横・高さの長さの数値を与え，体積を求める式と答えを求めた（Figure1）。

③二変数の関係操作の問題(問題 2)

底面積が同じで高さの異なる直方X，Yの２つ与え，どちらが大きいかを「これだけからは答えが出せない」「Xの体積が大きい」「Yの体積が大きい」「どちらも同じ体積」の４択で解答し，その理由を自由記述で求めるという形式で出題した (Figure2)。

④三変数の関係操作の問題(問題 3)

横の長さが同じで，縦と高さの長さが 2 倍になった場合，体積はどのくらい大きくなるかを問う問題である（Figure3）。ただし，「どれくらい大きいか」に答えるには「何㎤大きい」や「何倍大きい」という答え方があるという“まよわし”と正解例を与えた。また「直方体の体積＝縦×横×高さ」を使って考えるようにヒントを与えた。

⑤大きさを比較する際の枠組みを見る問題(問題 4)

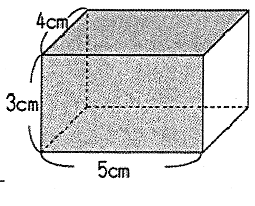
具体的には問題３の２つの直方体の縦・横・高さを実測した値とそれに基づく計算結果を示し，「72 ㎤大きい」「4 倍大きい」のどちらも言いうることを示して，どちらの比べ方をするか選択を求めた（Figure4）。

⑥「差の非保存・関係保存」理解を調べる問題(問題 5)

問題４の２つの直方体の横をともに長くした図形を提示し，それらの図形間で「72 ㎤大きい」「4 倍大きい」と言えるかを「言える」「言えない」「わからない」の３択で解答を求めた（Figure5）。

問題１　右の直方体の体積を求めなさい。

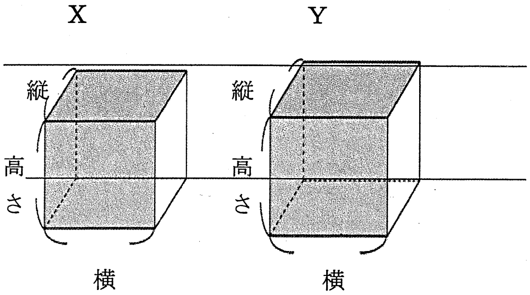
式



答＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

Figure 1 問題１　数値操作

問題２　平行な２本線がかべに書いてあります。下の線に合わせて，直方体を２つ置きました。底面積の大きさは同じです。図を見て下の質問に答えてください。



X，Yのどちらの直方体の体積が大きいでしょうか。１つ選んでください。またそう思った理由を簡単に書いてください。

ア．これだけからは答えが出せない

イ．Xの体積が大きい

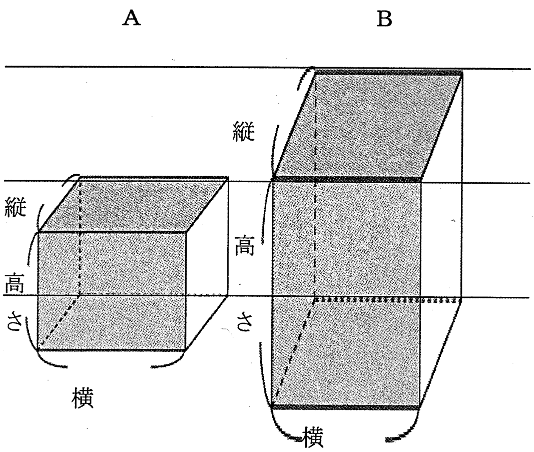
ウ．Yの体積が大きい

エ．どちらも同じ体積

理由(注　回答欄は省略)

Figure 2　問題２　二変数の関係操作

問題３　下のように平行な３本の線がかべにかいてあります。線の間の幅は同じです。１番下の線に合わせて，横の長さが同じで，縦の長さが２倍になっている直方体を２つおきました。図を見て下の質問に答えてください。



「Aの直方体の体積と比べて，Bの直方体の体積は，どれくらい大きいですか」と質問されたら，あ

なたはどのように答えますか。答え方はいくつかありそうです。例えば「何㎤大きい」という答え方や「何倍大きい」という答え方です。好きな答え方をしてください。分からないときは「分からない」と書いてください。

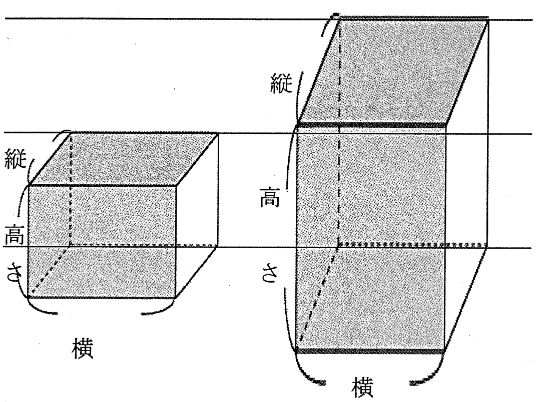
ヒント；直方体の体積＝縦×横×高さ

を使って考えてください。(解答欄は省略)

Figure 3　問題３　三変数の関係操作

問題４　下の図は問題３と同じです。問題３は，「Ａの直方体の体積と比べて，Ｂの直方体の体積は，どれくらい大きいか」でした。それを考えるために，Ａの直方体の縦と横と高さを実際に測ってみました。すると，下のような長さでした。これを基にして，Ｂの直方体の縦と高さがどれだけになるかを（　）に書き入れてください。

Ａ　　　　　　Ｂ



Ａの直方体　　　　　　Ｂの直方体

横の長さは同じなので

横：４㎝　⇒　横：（　　）㎝

縦の長さはＡの２倍なので

縦：２㎝　⇒　縦：（　　）㎝

平行線の幅が同じだからＢの高さは２倍

高さ：３㎝　⇒　高さ：（　　）㎝

上の辺の長さを使って，直方体の体積を計算してみましょう。Ａの体積は，４×２×３＝２４で，２４㎤になります。Ｂの体積は，４×４×６＝９６で，９６㎤になります。

まさお君は上の体積を使って，９６㎤－２４㎤＝７２㎤　という計算をして，「**Ｂの直方体はＡの直方体より７２㎤大きい**」と答えました。

あきら君は上の体積の値を使って，９６㎤÷２４㎤＝４　という計算をして「**Ｂの直方体は，Ａの直方体の４倍大きい**」と答えました。

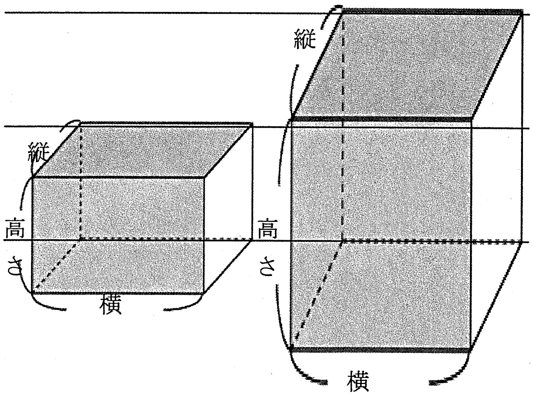
あなただったら，Ａの直方体とＢの直方体の大きさを比べるとき，どちらの比べ方をしますか。１つ選んでカタカナに〇をつけてください。

ア．まさお君　　イ．あきら君　　ウ．分からない

Figure 4　問題４　相対把握・絶対把握

問題５　下の図は，問題４の図の横の長さが同じ分だけ大きくなりました。しかし平行線の幅は問題４と同じです。

Ｃ　　　　　　Ｄ



（１）この図の場合，問題４と同じように，「Ｄの直方体は，Ｃの直方体より７２㎤大きい」と言えるだろうか。

ア．　言える　イ．　言えない　ウ．　分からない

（２）この図の場合，問題４と同じように，「Ｄの直方体は，Ｃの直方体より４倍大きい」と言えるだろうか。

ア．　言える　イ．　言えない　ウ．　分からない

Figure 5　問題５　差の非保存・関係保存

３．結果と考察

（１）空間図形の理解を調べる問題の分析

1）数値操作

問題１で，式（４×５×３）と答（６０㎤）ともに正しい正解者は解答のあった 137 名中 130 名（95%）であり，大部分の者が数値操作を行うことができた。

2）二変数の関係操作

問題２では，関係操作が可能な正答者（「ウ．Ｙの体積が大きい」を選択し，かつその理由をＡ１「高さ」またはＡ２「線に届く」「すきま」等の言葉を用いて説明している者）は，解答のあった131名中76名（58%）であった。数値操作の正答率に比べると高いとは言えない。やはり数値操作が可能であっても，関係操作が可能とは言えないということがわかる。

3）三変数の関係操作

問題３において関係操作が可能な「4倍大きい」と正答であった者は，解答のあった 132 名中 48 名（35%）であった。数値操作を行えた者の割合と比べると明らかに低い。問題３からも数値操作と関係操作の成立は別だと考えられる。また，二変数の関係操作よりも正答者の割合が低くなっている。

4）相対把握・絶対把握

問題 4 において，絶対把握を選んだ者（「ア．まさお君」選択者）は解答のあった124名中28名（23%），相対把握を選んだ者（「イ．あきら君」選択者）は 83 名（67%），「ウ．わからない」を選んだ者は 13 名（11%）であった。相対把握を選んだ者と絶対把握を選んだ者の割合を比較すると，相対把握を選んだ者は，絶対把握を選んだ者より有意に多かった（χ^2=27.25，p<.001）。

5）差の非保存・関係保存

問題５の（１）において「差の非保存」の理解者（７２㎤大きいと「イ．言えない」を選択した者）は 56 名（41%），（２）において「関係保存」の理解者（4倍大きいと「ア．言える」を選択した者）は68名（50%）であった。「関係保存」の理解よりも「差の非保存」の理解の方がやや困難であることがわかる（Table1）。「差の非保存・関係保存」の理解者は，135名中39名（29%）であった。

Table1　問題５での解答結果　　人（%）

		(2) 4倍大きいと 1.言える 68名(50%)	2.言えない 32名(24%)	3.分からない 35名(26%)
(1) 4倍大きいと				
1.言える	40名（30%）	26	12	2
2.言えない	**56名（41%）**	**39（29%）**	16	1
3.分からない	39名（29%）	3	4	32

計　135人

（２）関係操作と空間図形の理解を調べる問題の関連

1）関係操作と相対把握・絶対把握の関連

問題３での関係操作の成否と問題４での相対把握，絶対把握の関連を検討する。相対把握を選んだ 80 名中 43 名（54%）が，問題 3 での関係操作が可能であったが，絶対把握を選んだ 28 名中では 3 名（11%）に留まった（χ^2=15.71，p<.01)。この結果から，相対把握を行う者は，絶対把握を行う者よりも関係操作が可能な者の割合が高いことが示された。やはり，体積を求める三変数公式においても，相対把握を行えることは，関係操作を可能にするよう影響を与えていると言える。よって仮説は支持された。

2)関係操作と差の非保存・関係保存の関連

問題３での関係操作の成否と，問題５での「差の非保存・関係保存」の理解との関連を検討する（Table2）。「差の非保存・関係保存」を両方理解している者と，「差の非保存・関係保存」のどちらか一方だけを理解しているかまたは両方とも理解していない者の２群に分けて関係操作の成否を検討した。その結果，問題での「差の非保存・関係保存」の理解者36名中21名（58%）が，関係操作が可能であった。「差の非保存・関係保存」のどちらか一方だけを理解しているかまたは両方とも理解していない群では，48名中16名（38%）に留まった。しかし，両群間の割合に有意な差は見られなかった（χ^2=5.217，ns）。有意な差が見られなかった要因として，「差の非保存・関係保存」の理解を調べる問題がそれぞれ三択であったため，ランダムに解答しても，「差の非保存・関係保存」の問題に，ともに正答する確率は約11%である。また，どちらか一方を理解していれば，もう一方を適当に解答しても約33%で正答してしまう。そのため，理解していなくとも「差の非保存・関係保存」の理解者に入ってしまった人もいると考えられる。今後は，「差の非保存・関係保存」の問題を増やすなどをして，偶然による正答率を下げて調査を行う必要がある。

問題 5 を(1)(2)に分けて，関係操作と「差の非保存・関係保存」の関連を検討する。「差の非保存」の正答者55名中では29名（53%）が関係操作が可

能であったが，誤答者74名中では18名（24%）に留まった（χ^2=10.99，p<.05）。「差の非保存」を理解している者はそうでない者に比べ，関係操作を行いやすいことがわかる。

また(2)「関係保存」の正答者67名中33名（49%）が関係操作が可能であったが，誤答者62名中では13名（21%）に留まった（χ^2=11.23，p<.05）。「関係保存」について理解している者はそうでない者に比べ，関係操作を行いやすいことがわかる。

小問別に見れば，「差の非保存・関係保存」の理解者はそうでない者よりも問題3で関係操作が可能な者の割合が高かった。したがって，「差の非保存・関係保存」の理解は関係操作を可能にするように影響を与えていることがわかる。

Table2 問題3と問題5での解答の関連　人（%）

問題5	問題3「a.b.4倍大きい」	問題3「d.分からない　e.その他」
ともに正答（36名）	21（58%）	15（42%）
それ以外　（48名）	16（38%）	32（62%）
(1)で正答（55名）	29（53%）	26（47%）
誤答（74名）	18（24%）	56（76%）
(2)で正答（67名）	33（49%）	34（51%）
誤答（62名）	13（21%）	49（79%）

3）関係操作と相対把握・絶対把握と差の非保存・関係保存の関連

問題3での関係操作の成否の人数を，問題4と問題5での解答をパターン別に検討する（Table3）。問題4で絶対把握を選んだ者では，問題5での「差の非保存・関係保存」の理解に関係なく，関係操作ができた者はいなかった。問題4で相対把握を選び，かつ問題5での「差の非保存・関係保存」を理解している者では，32名中21名（66%）が関係操作が可能であった。しかし，問題4で相対把握を選びかつ問題5で「差の非保存・関係保存」を理解していない者では，39名中16名（41%）に留まった。関係操作可能者の比率を検定したところ有意差が見られた（χ^2=13.97，p<.05）。残差分析の結果A群には関係操作可能者が多く（調整された残差＝3.02，p<.01）不可能者が少なかった（調整された残差＝-3.02，p<.01）。またD群には関係操作可能者が少なく（調整された残差＝-2.45，p<.01）不可能者が多かった（調整された残差＝2.45，p<.01）。したがって，以上のことから相対把握を行いかつ「差の非保存・関係保存」の理解が成立していれば関係操作は行いやすく，逆に，絶対把握を行いかつ「差の非保存・関係保存」の理解が成立していなければ，関係操作は行いにくいことを示している。よって，仮説は支持された。

Table3 問題4と問題5での解答の違いによる関係操作の成否人数　人（%）

問題4	相対把握		絶対把握	
問題5	「差の非保存・関係保存」理解者（A群32名）	それ以外（B群39名）	「差の非保存・関係保存」理解者（C群4名）	それ以外（D群9名）
関係操作				
可能	21（66%）	16（41%）	0（0%）	0（0%）
不可能	11（34%）	23（59%）	4（100%）	9（100%）

計　84人

（3）関係操作と数学・空間図形に関する質問との関連

1）関係操作と数学の好嫌度との関連

「数学は好きか」という質問に対して問題3で関係操作が可能な群（48名）では，得点の平均値は3.04点（SD=.988）であり（Figure6），関係操作が不可能な群（81名）の2.43点（SD=.865）よりも，有意に高かった（t=3.667，df=127，p<.001）。関係操作が可能である者は，そうでない者より「数学が好き」であることが示された。

2）関係操作と数学の難易度との関連

「数学は難しいか」という質問では，関係操作不可能群は2.84点（SD=.955）であり，関係操作可能群の2.50点（SD=.899）よりも，有意に高かった（t=1.994，df=127，p<.05）。関係操作が不可能である者は，そうでない者より「数学は難しい」と思っていることが示された。

3）関係操作と数学の授業に対する意欲との関連

「数学の授業に対して意欲的に取り組んでいるか」という質問では，関係操作可能群は，2.92点（SD=.895）であり，関係操作不可能な群2.64点（SD=.870）よりも、有意に高い傾向が見られた（t=1.714，df=127，p<.10）。したがって，関係操作が可能である者は，そうでない者より「数学の授業

に意欲的に取り組んでいる」傾向があることがうかがえる。

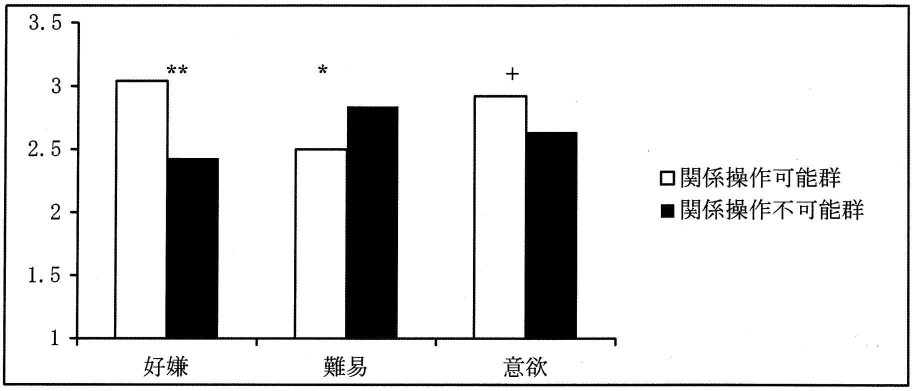


Figure6 関係操作可能群と不可能群の数学に対する意識

**p<.01, *p<.05, +p<.10

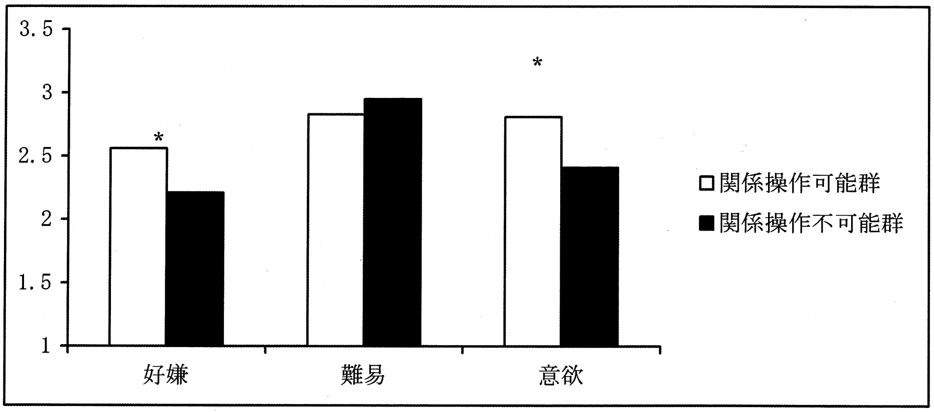


Figure7 関係操作可能群と不可能群の空間図形に対する意識

**p<.01, *p<.05, +p<.10

4) 関係操作と空間図形の単元の好謙度との関連

「空間図形の単元は好きか」という質問に対して，問題 3 で関係操作が可能な群（48 名）は 2.56 点（SD=.873）であり（Figure7），関係操作が不可能な群（80 名）の 2.21 点（SD=.852）よりも，有意に高かった（ t =2.229, df=126, p<.05）。関係操作が可能である者は，そうでない者より「空間図形の単元が好き」であることが示された。

5) 関係操作と空間図形の難易度との関連

「空間図形は難しいか」という質問では，関係操作可能群は 2.83 点（SD=.930），関係操作不可能群は 2.95 点（SD=.967）であり，両群間に有意な差は見られなかった（ t =0.670, df=126, ns.）関係操作の成否と「空間図形の単元は難しい」と思っているかどうかは関連がないことがわかる。

6) 関係操作と「空間図形の授業に対して意欲的に取り組んでいるか」という質問の関連

「空間図形の授業に対して意欲的に取り組んでいるか」という質問では関係操作が可能な群は 2.81 点（SD=.915）であり，関係操作が不可能な群の 2.41

点（SD=.882）よりも，有意に高かった（ｔ=2.451, df=126, p<.05）したがって，関係操作が可能である者は，そうでない者より「空間図形の授業に対して意欲的に取り組んでいる」と言える。

以上見てきたように，関係操作が可能な生徒はそうでない生徒に比べ、数学・空間図形への意識が高いことが明らかになった。しかし，今回の調査では，数学や空間図形の単元が好きだから，授業に意欲的に取り組み，その結果として関係操作が可能となっているのか。それとも，数学や空間図形に意欲的に取り組んでいるから，関係操作が可能となり，問題が解けるようになり，数学や空間図形が好きになっていくのか，というような因果関係は明らかにできない。おそらく，そこには双方的な相互関係が存在すると推察できる。

しかしながら，関係操作ができる生徒は、できない生徒より数学･空間図形への意識が高いことから，やはり関係操作が行えるようにする指導は大切であると考えられる。そのためには，数学公式を暗記させ，数値を代入して答えを出すことができるようにするだけの指導であってはならない。数学公式は答えを導き出すツールという認識ではなく、定理を数式化したものである故，具体的な数値がわからない場面でも，公式が利用できるという認識を生徒に持たせる授業が求められる。このような認識が持てれば，数学公式は様々な場面で用いることができ，数学を学習する意義も見いだすこともできよう。そのためには、公式を暗記して答えが出せれば、テストで高得点がとれるような授業ではなく、解答を導き出す過程を重視した教育が行われなければならない。その過程こそが，本来数学で培われるべき論理的思考能力育成の鍵となるのである。

4．今後の課題

今後は、直方体以外の様々な空間図形の体積や図形以外のタイプの公式においても、本研究で得られたような知見が成立するのか研究する必要がある

また，今回の研究では中学２年生のみに調査を行なったが，学年が上がるにつれて，文字式を使う機会も増え，関係操作ができる学習者も増えていくと考えられるので，学年差を検討していくことも必要であろう。

さらに，教師の指導方法や生徒の数学の重要性認識などの変数と、関係操作との関連性を検討していくことも課題である。

5．引用文献

麻柄　啓一　(2009)．数字がないと公式が使えないのはなぜか　―小学生の関係操作の成否とその原因―　教育心理学研究，57，180―191

文部科学省(2007)．国際数学・理科教育動向調査（TIMSS2007）　国際教育到達評価学会（IEF)